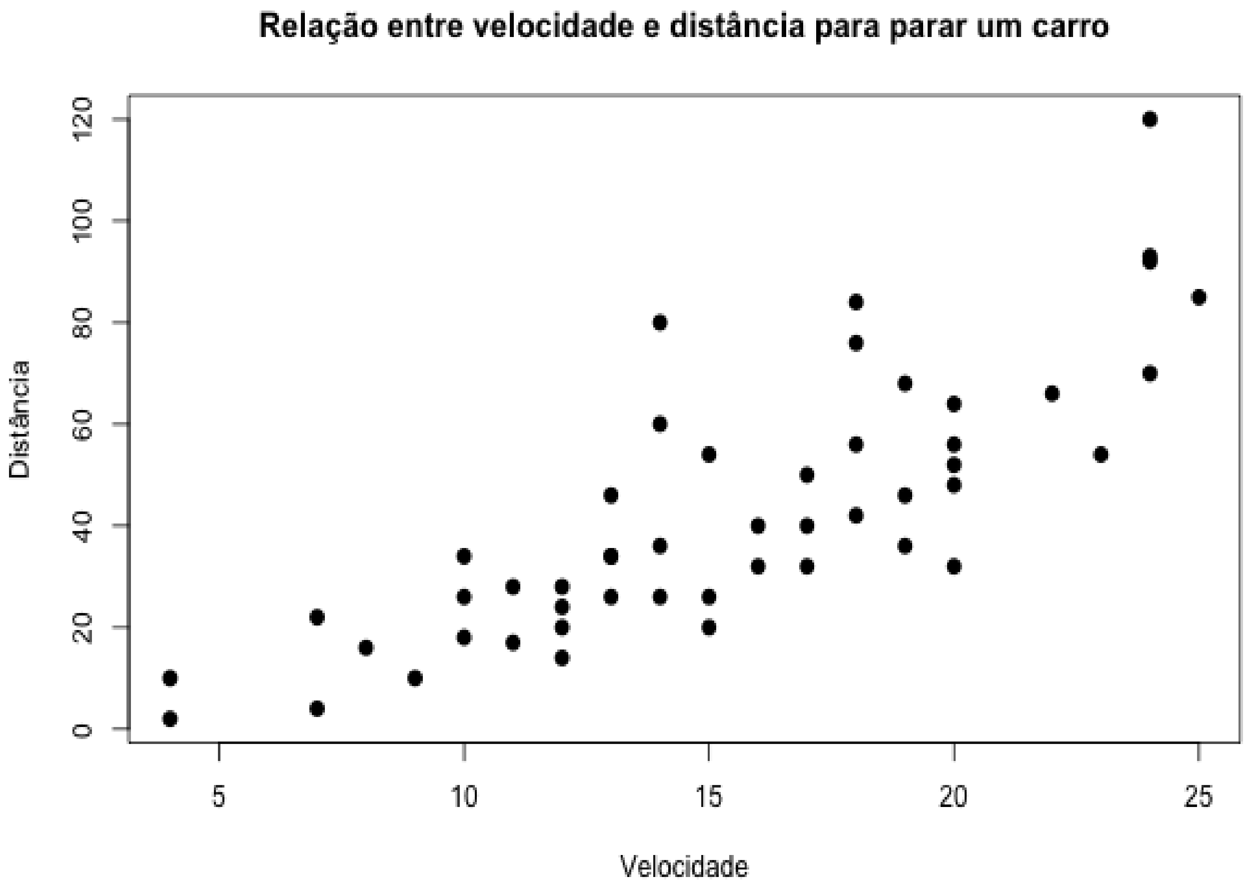
Regressão Linear

Fabrício Jailson Barth

Abril de 2014

Dados sobre carros



Código para plotar o exemplo anterior

```
data(cars)

plot(cars$dist ~ cars$speed, pch=19, lwd=2,
     xlab="Velocidade", ylab="Distância",
     main="Relação entre velocidade e distância
     para parar um carro")
```

Relacões entre variáveis

- Será que existe relação entre a distância com que um carro consegue parar e a velocidade com que ele estava no momento da freada?
- Métodos de regressão tentam identificar se existe uma relação entre a variável dependente (o valor que precisa ser predito) e a variável independente.
- Distância = variável dependente
- Velocidade = variável independente

Definindo linhas

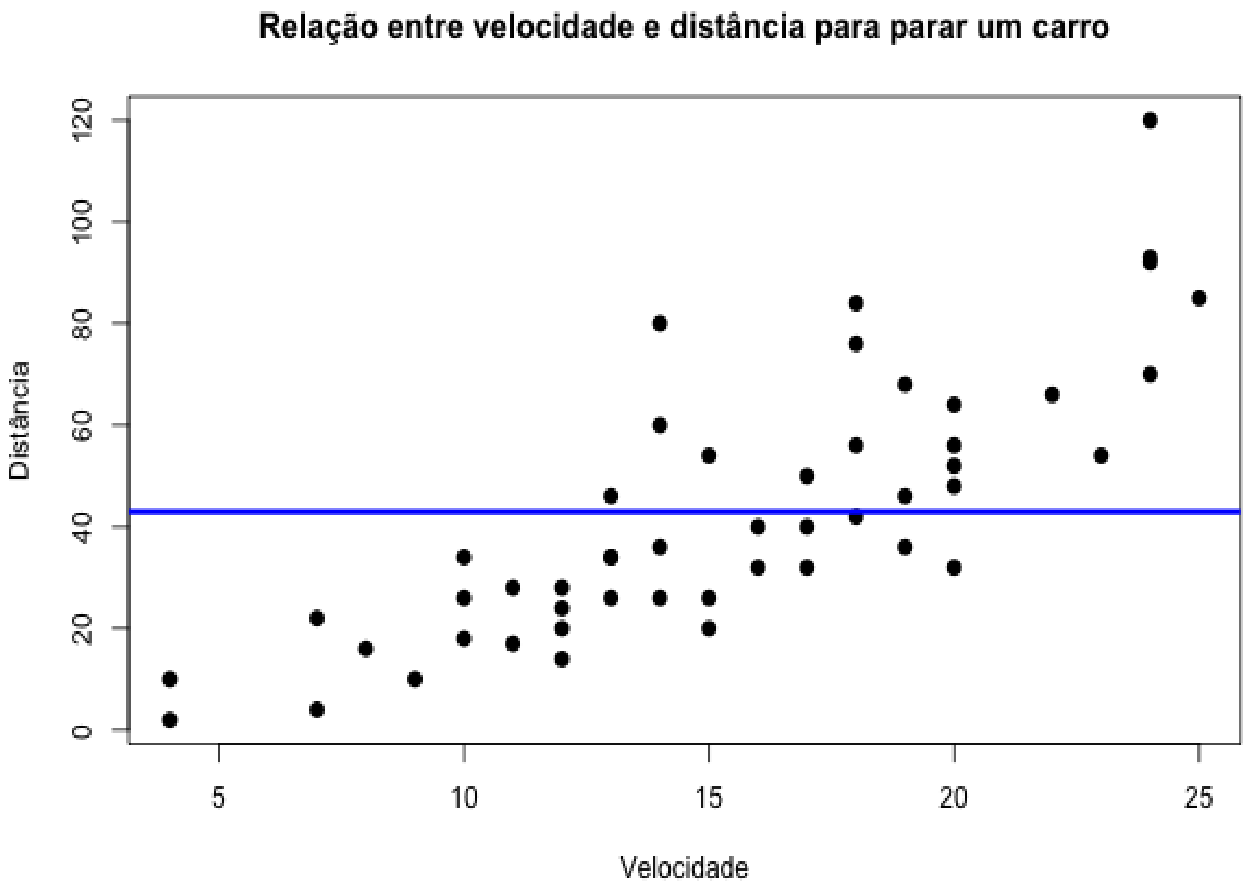
- Uma linha pode ser definida na forma de $y = \alpha + \beta \times x$
- onde x é a variável independente e y a variável dependente.
- b indica quanto a linha cresce a cada incremento de x.
- A variável α indica o valor de y quando $x = 0$.

Definindo modelos de regressão linear

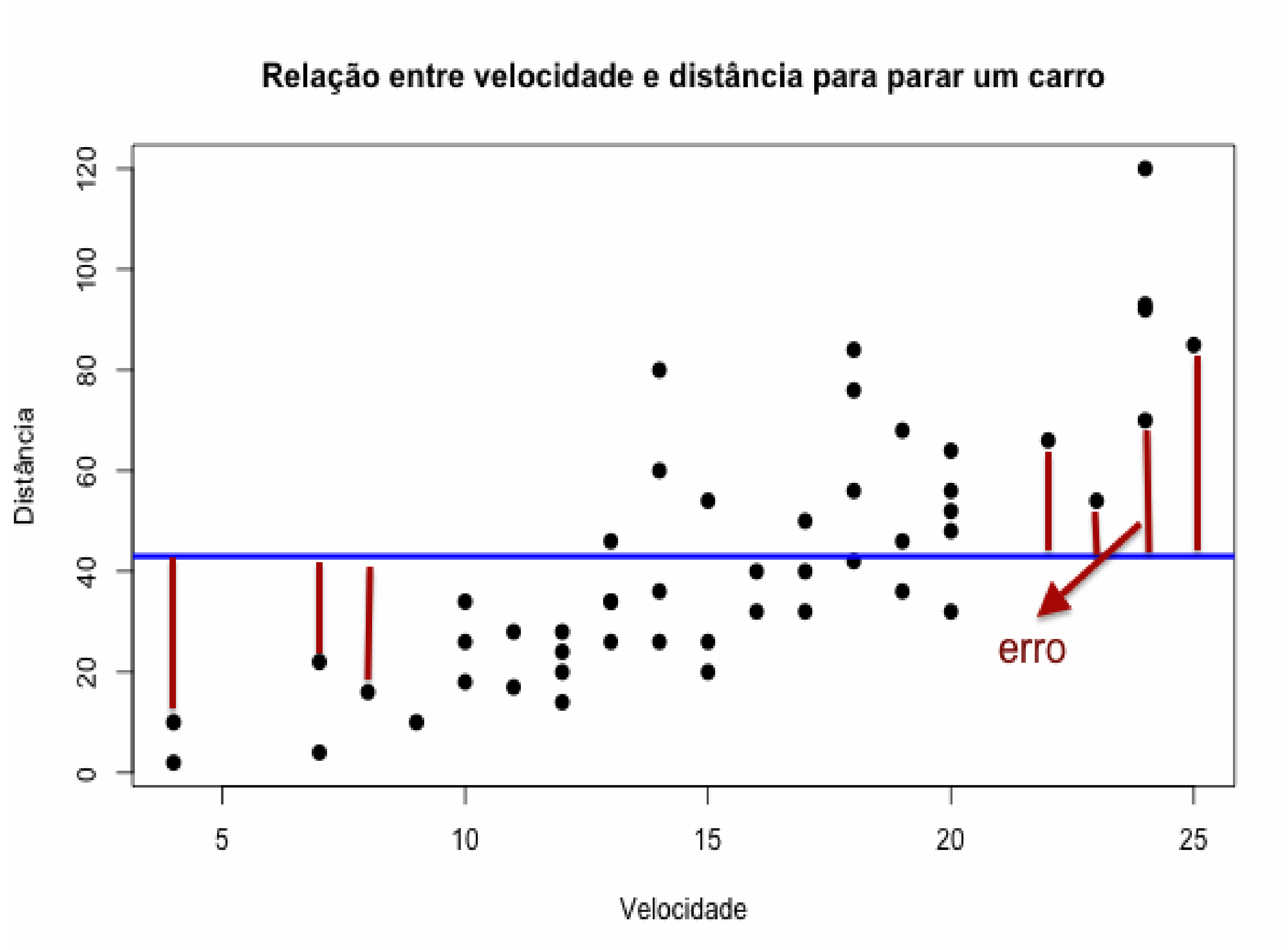
- O objetivo de um algoritmo que cria este tipo de função é definir valores para α e β de tal maneira que a linha consiga representar o conjunto de dados.
- Esta linha pode não representar o conjunto de dados perfeitamente. Portanto, é necessário calcular o erro de alguma forma.

$$distancia = 42.3 + 0 \times velocidade$$

É uma função válida. Mas é uma função boa?



Erro de $distancia = 42.3 + 0 \times velocidade$



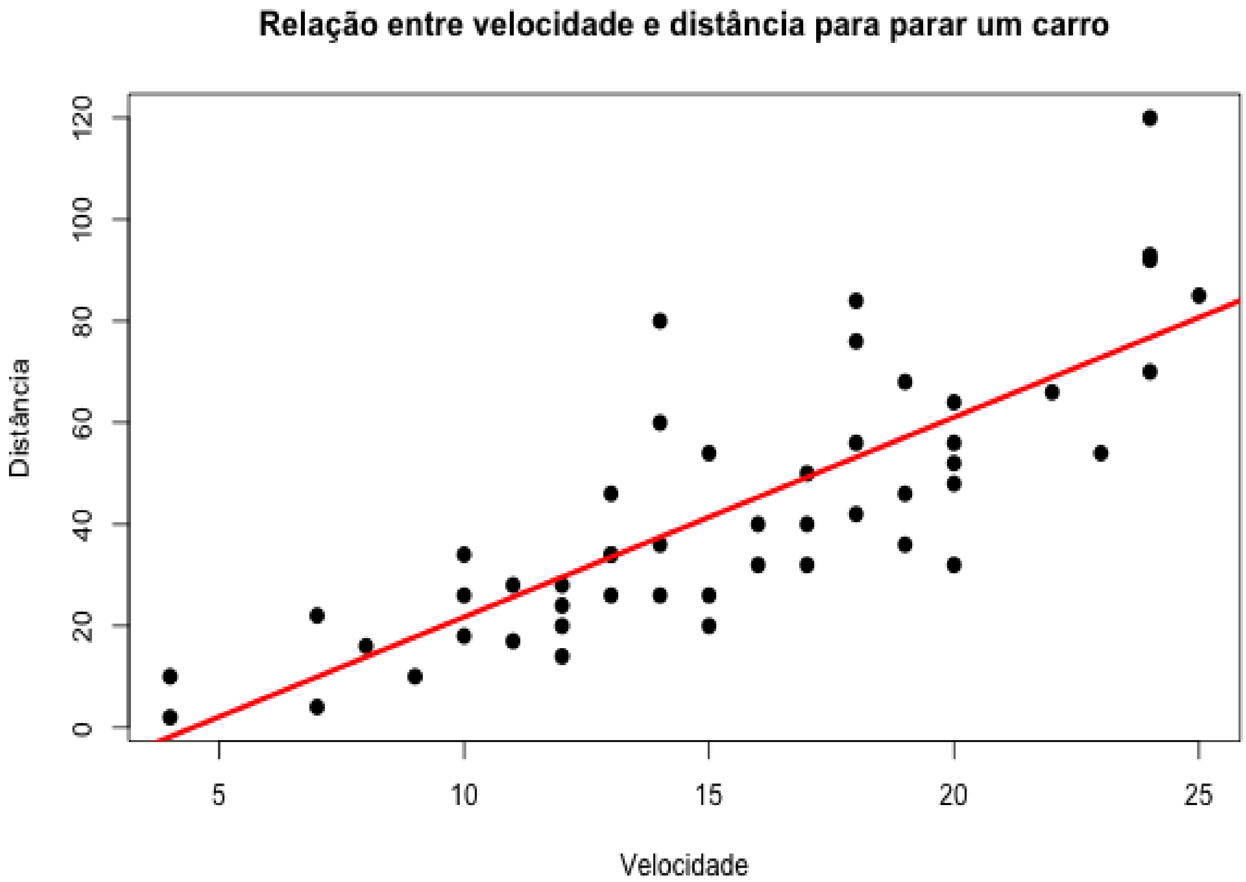
Determinando o valor de α e β em uma regressão linear simples

- Para estimar os melhores valores para α e β é utilizado método chamado de **ordinary least squares (OLS)**.
- Com este método, os valores de α e β são escolhidos para minimizar a soma dos erros ao quadrado, ou seja, a distância vertical entre o valor predito e o valor real.

$$erro = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{1}$$

onde, y_i é o valor real e $\hat{y}_i$ é o valor predito.

Uma função com um erro menor



Código em R para o slide anterior

```
model <- lm(dist ~ speed, data=cars)
plot(cars$dist ~ cars$speed, pch=19, lwd=2,
     xlab="Velocidade", ylab="Distância",
     main="Relação entre velocidade e distância
     para parar um carro")
abline(model, col="red", lwd=3)
```

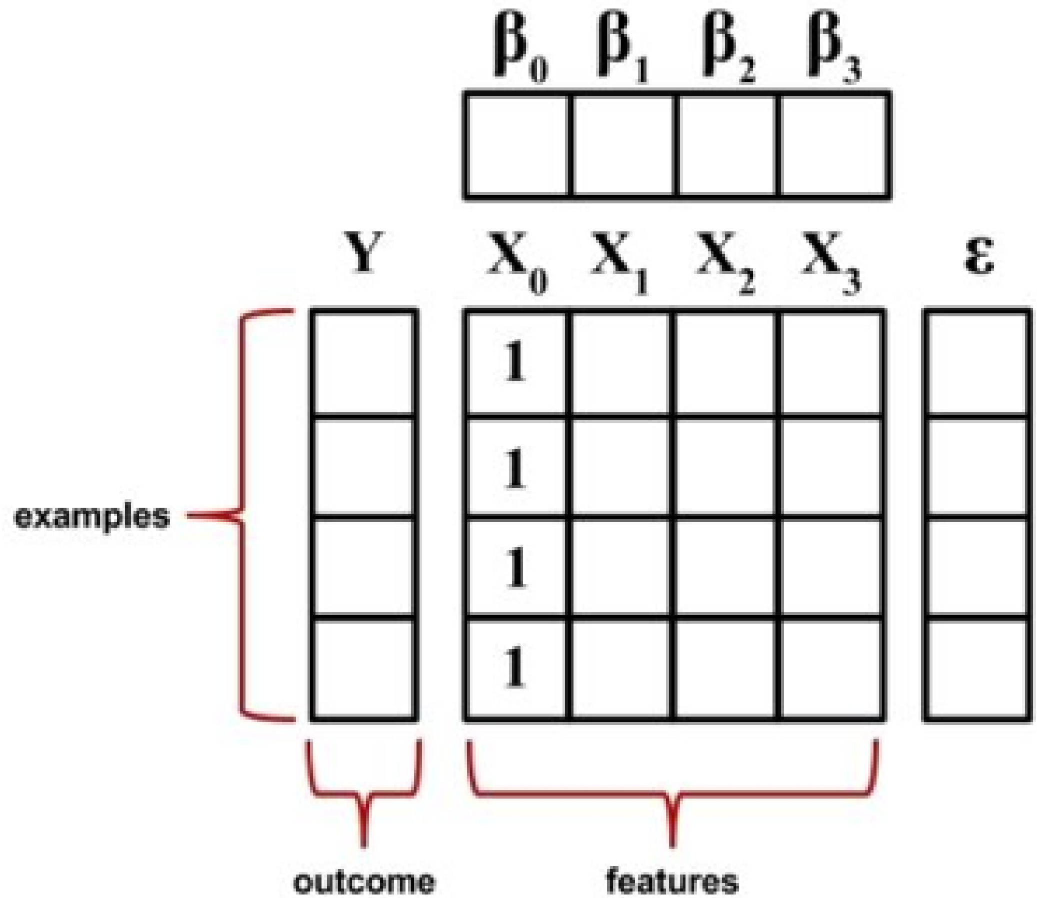
Regressão linear múltipla

$$y = \alpha + \beta_1 \times x_1 + \beta_2 \times x_2 + \cdots + \beta_i \times x_i + e \qquad (2)$$

Podemos utilizar uma equação compactada:

$$Y = X \times \beta + e \qquad (3)$$

Regressão linear múltipla



Regressão linear múltipla

Agora o objetivo é resolver $\hat{\beta}$:

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{4}$$

onde X^T é matriz transposta de X e X^{-1} a matriz inversa de X.

Implementação em R

```
reg <- function(x,y){
  x <- as.matrix(x)
  x <- cbind(Intercept = 1, x)
  solve(t(x) %*% x) %*% t(x) %*% y
}
```

onde: `solve()` retorna a matriz inversa, `t()` calcula a matriz transposta e `%*%` multiplica duas matrizes.

Encontrando os coeficientes para o problema do carro

```
reg(y = cars$dist, x = cars$speed)
```

deve retornar os mesmos valores de coeficientes que

```
model <- lm(dist ~ speed, data=cars)
```

Exemplo de regressão linear simples usando lm

```
> model <- lm(dist ~ speed, data=cars)
> model

Call:
lm(formula = dist ~ speed, data = cars)

Coefficients:
(Intercept)        speed
    -17.579        3.932
```

Exemplo de regressão linear múltipla

```
data(airquality)
help(airquality)
head(airquality)
```

Exemplo de regressão linear múltipla

```
> head(airquality)
  Ozone Solar.R Wind Temp Month Day
1    41     190  7.4   67     5   1
2    36     118  8.0   72     5   2
3    12     149 12.6   74     5   3
4    18     313 11.5   62     5   4
5    NA      NA 14.3   56     5   5
6    28      NA 14.9   66     5   6
```

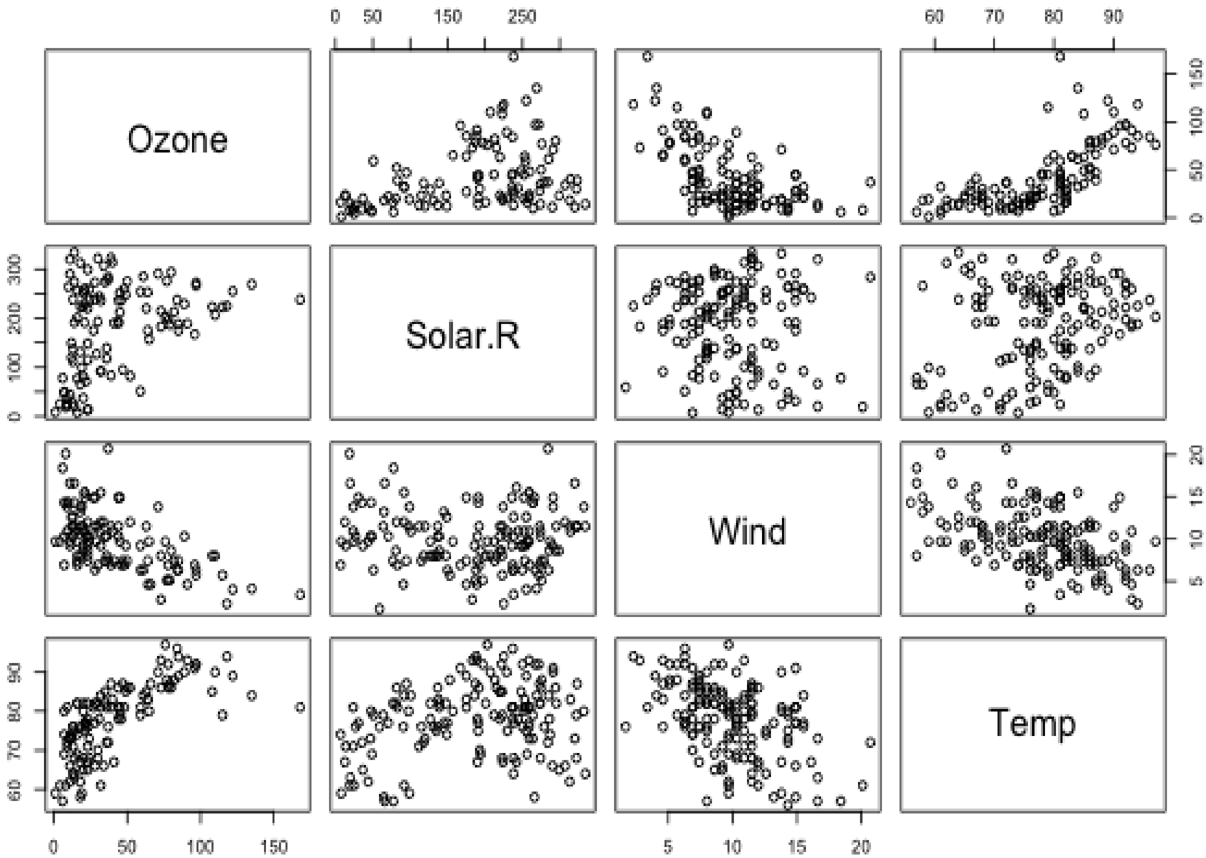
Exemplo de regressão linear múltipla

```
> modelAirQuality <- lm(Ozone ~ Solar.R + Wind +
  Temp, data=airquality)
> modelAirQuality

Call:
lm(formula = Ozone ~ Solar.R + Wind + Temp,
   data = airquality)

Coefficients:
(Intercept)      Solar.R         Wind         Temp
  -64.34208      0.05982     -3.33359      1.65209
```

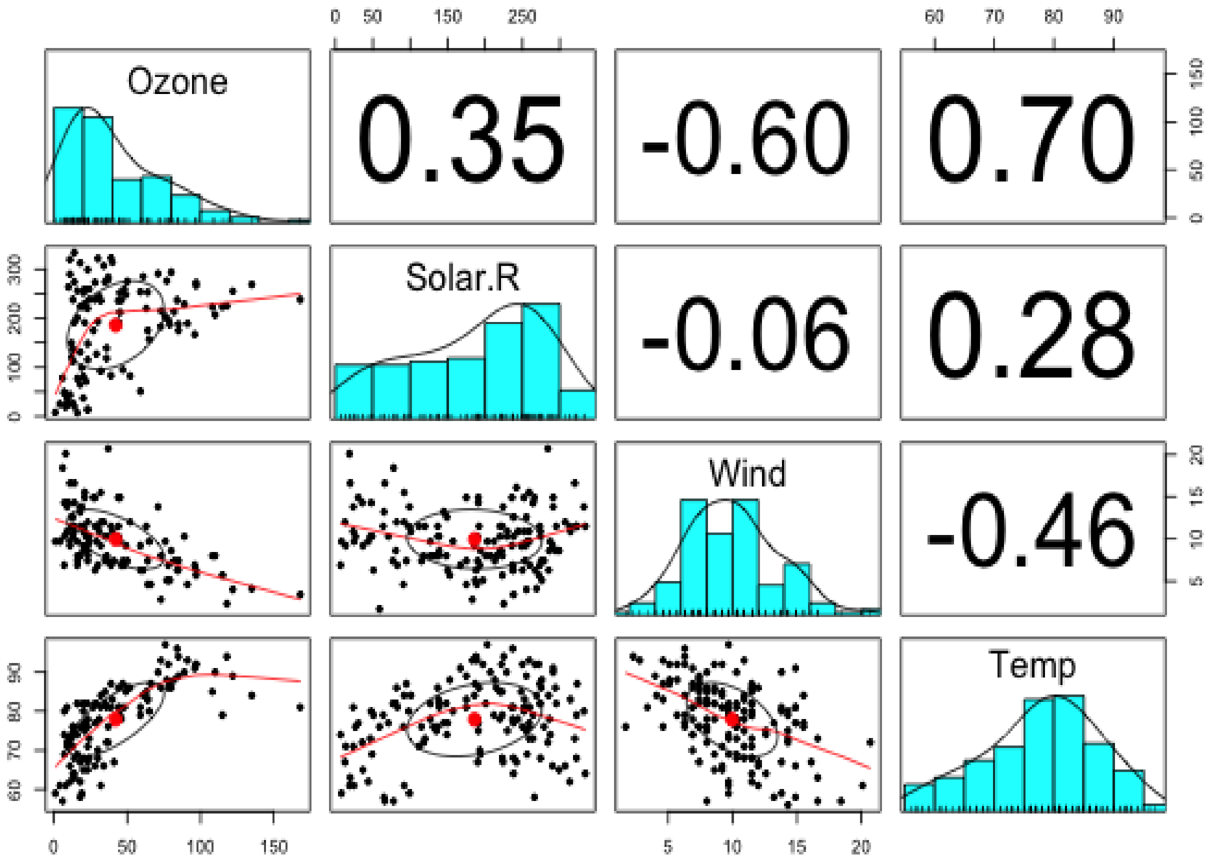
Analisando os dados

```
png(filename="../figuras/pairsNY.png", width=600,
    height=400)
pairs(airquality[1:4])
dev.off()
library(psych)
png(filename="../figuras/pairsPanelNY.png",
    width=600, height=400)
pairs.panels(airquality[1:4])
dev.off()
```

Correlação entre atributos



Correlação entre atributos



Avaliando o modelo

```
> summary(modelAirQuality)

Call:
lm(formula = Ozone ~ Solar.R + Wind + Temp, data = airquality)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-40.485 -14.219  -3.551  10.097  95.619

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -64.34208   23.05472  -2.791  0.00623 **
Solar.R       0.05982    0.02319   2.580  0.01124 *
Wind         -3.33359    0.65441  -5.094 1.52e-06 ***
Temp          1.65209    0.25353   6.516 2.42e-09 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 21.18 on 107 degrees of freedom
  (42 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared:  0.6059,    Adjusted R-squared:  0.5948
F-statistic: 54.83 on 3 and 107 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

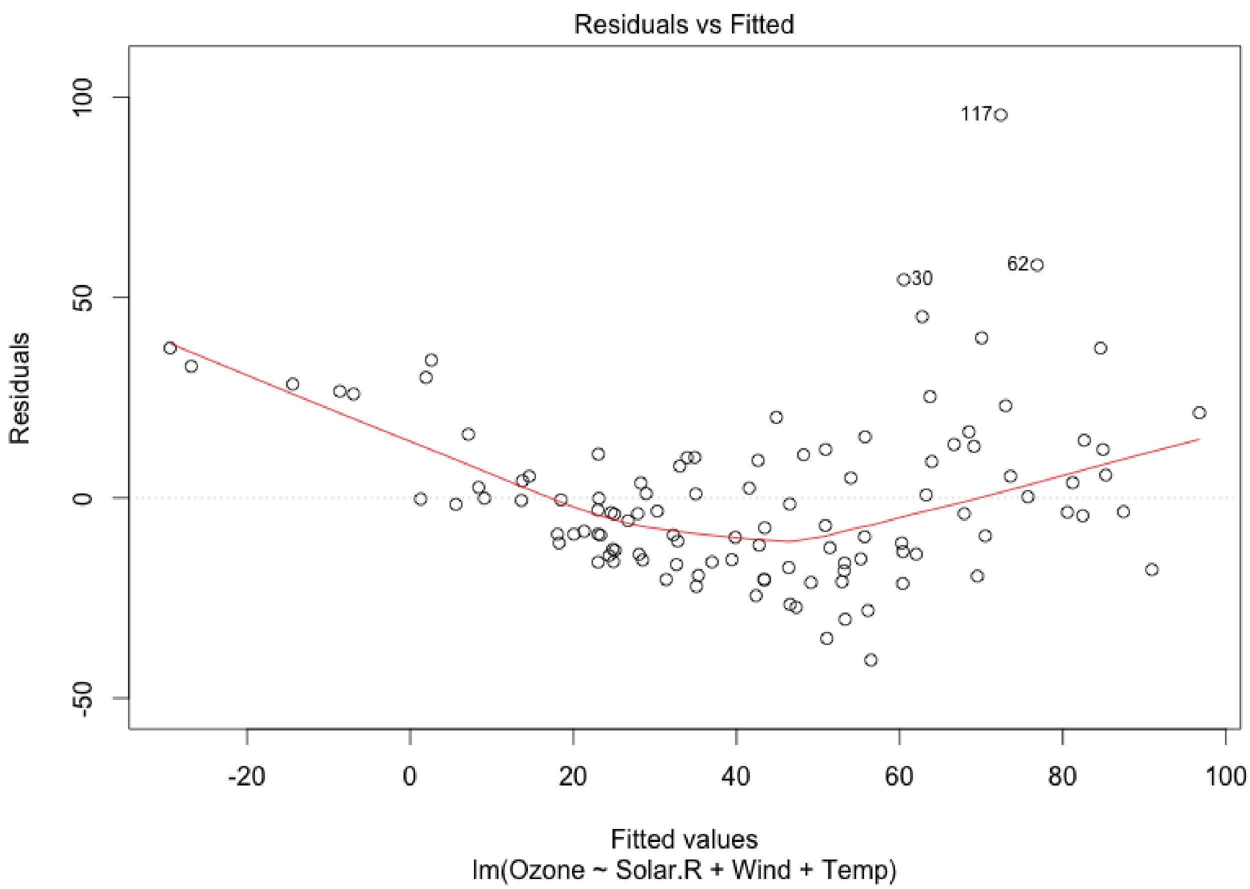
Avaliando o modelo

1. Fornece um resumo sobre os erros do modelo. Um resíduo é igual ao valor verdadeiro menos o valor predito. O valor máximo do resíduo no problema anterior é 95.619. Isto significa que o modelo substima o valor de Ozônio de pelo menos um dia em 95.619. Por outro lado, 50% dos erros ficam entre os valores do primeiro e terceiro quartis, ou seja, o modelo super-estima em 14.219 e sub-estima em 10.097.

2. As estrelas ($***$) indicam o poder de predição de cada atributo no modelo. Para fins práticas, considera-se que um atributo é estatisticamente significante quando o nível de significância é menor ou igual a 0.05. Se o modelo possui poucos atributos estatisticamente significantes então deve-se considerar outros modelos para predizer a variável de interesse.

3. O *Multiple R-squared* (também chamado como coeficiente de determinação) fornece uma medida de quão bem o modelo como um todo explica os valores da variável dependente. É similar ao coeficiente de correlação, onde quanto mais próximo de 1.0, melhor o modelo explica os dados. O valor de *Adjusted R-squared* penaliza modelos com um número maior de variáveis independentes.

Avaliando o modelo



Exercício

Qual dos modelos abaixo consegue explicar melhor os dados?

```
modelAirQuality1 <- lm(Ozone ~ Solar.R + Wind + Temp,
                       data=airquality)
modelAirQuality2 <- lm(Ozone ~ Wind + Temp,
                       data=airquality)
modelAirQuality3 <- lm(log(Ozone) ~ Solar.R + Wind + Temp,
                       data=airquality)
```